Қарапайым мысалдар:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}=x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}+\ldots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n(x+2)^n}{n^2}=2(x+2)+\frac{2^2(x+2)^2}{2^2}+\frac{2^3(x+2)^3}{3^2}+\frac{2^4(x+2)^4}{4^2}+\frac{2^5(x+2)^5}{5^2}+\ldots$$

$$1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}+\ldots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n!}=x^2+\frac{x^4}{2!}+\frac{x^6}{3!}+\frac{x^8}{4!}+\frac{x^{10}}{5!}+\ldots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}\cdot(x-1)^{3n-2}}{3^n}=\frac{(x-1)}{3}+\frac{\sqrt{2}\cdot(x-1)^4}{3^2}+\frac{\sqrt{3}\cdot(x-1)^7}{3^3}+\frac{\sqrt{4}\cdot(x-1)^{10}}{3^4}+\frac{\sqrt{5}\cdot(x-1)^{13}}{3^5}+\ldots$$

Дәрежелік қатарлар. Жинақтылық радиусы және интервалы.

Мысал 1: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}$.

Егер $x=1$, то $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1^n}{n^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ жинақты

Егер $x=-1$, то $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$ абсолютті жинақты

Егер $x=3$, то $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n^2}$ жинақсыз.

Егер $x=-\frac{1}{5}$, то $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(-\frac{1}{5}\right)^n}{n^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\frac{(-1)^n}{5^n}}{n^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2\cdot 5^n}$ абсолютті жинақты.

Енді осы қатардың жинақтылық облысын анықтайық: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}$

Мүшесінің абсолют шамасын алып, Даламбер белгісін қолдануға болады:

$\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|$,

$$\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| \overset{(1)}{=} \lim\limits_{n\to+\infty}\left|\frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}}{\frac{x^n}{n^2}}\right| \overset{(2)}{=} \lim\limits_{n\to+\infty}\left|\frac{n^2\cdot x^{n+1}}{(n+1)^2\cdot x^n}\right| \overset{(3)}{=} \lim\limits_{n\to+\infty}\left|\frac{n^2\cdot x\cdot x^n}{(n^2+2n+1)\cdot x^n}\right| \overset{(4)}{=}$$

$$= |x|\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n^2}{n^2+2n+1} \overset{(5)}{=} \frac{\infty}{\infty} = |x|\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\frac{n^2}{n^2}}{\frac{n^2+2n+1}{n^2}} = |x|\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{1+\frac{2}{n}^{\to 0}+\frac{1}{n^2}^{\to 0}} = |x|\cdot 1 = |x|$$

Даламбер белгісінің жинақтылық шартынан $|x|<1$ аламыз, яғни,

$-1<x<1$ – берілген дәрежелік қатардың жинақтылық интервалы. Енді интервалдың ұштарын жинақтылыққа зерттейміз:

$x=-1 \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$ абсолюютi жинақты қатар, өйткені, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n| = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ жинақты

$x=1 \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1^n}{n^2} = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ – жинақты,

Ендеше, $-1\le x\le 1$ жинақтылық облысы немесе $x\in[-1;1]$

Мысал 2

$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{3^n\cdot\sqrt{n+1}}$ жинақтылық облысын табу керек:

Мүшесінің абсолют шамасын алып, Даламбер белгісін қолдануға болады:

$$\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \lim\limits_{n\to+\infty}\left|\frac{\frac{x^{n+1}}{3^{n+1}\cdot\sqrt{n+1+1}}}{\frac{x^n}{3^n\cdot\sqrt{n+1}}}\right| = \lim\limits_{n\to+\infty}\left|\frac{x^{n+1}\cdot 3^n\cdot\sqrt{n+1}}{3^{n+1}\cdot\sqrt{n+2}\cdot x^n}\right| =$$

$$= \lim\limits_{n\to+\infty}\left|\frac{x\cdot x^n\cdot 3^n\cdot\sqrt{n+1}}{x^n\cdot 3\cdot 3^n\cdot\sqrt{n+2}}\right| = \frac{|x|}{3}\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}}}{\frac{\sqrt{n+2}}{\sqrt{n}}}\right) = \frac{|x|}{3}\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{1}{n}^{\to 0}}}{\sqrt{1+\frac{2}{n}^{\to 0}}} = \frac{|x|}{3}$$

Стандартты жинақтылық теңсіздігін аламыз: $\frac{|x|}{3}<1$ немесе $|x|<3$ немесе $-3<x<3$ – жинақтылық интервалы, Енді интервалдың ұштарын жинақтылыққа зерттейміз:

1) Егер $x=-3 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-3)^n}{3^n\cdot\sqrt{n+1}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot 3^n}{3^n\cdot\sqrt{n+1}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$

Абсолют шамасынан тұратын қатар $\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}}$ салыстыру белгісі бойынша жинақсыз: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$. Жинақсыз қатармен салыстырамыз,

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\frac{1}{\sqrt{n}}}{\frac{1}{\sqrt{n+1}}}\right)=\lim_{n\to+\infty}\sqrt{\frac{n+1}{n}}=\lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}^{\to 0}}\right)=1$$

.

Ал қатардың өзі **Лейбниц белгісі бойынша** $\lim_{n\to+\infty}|a_n|=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}}=0$ шартты жинақты қатар: Өйткені, $\frac{1}{\sqrt{n+2}}<\frac{1}{\sqrt{n+1}}$ $\left(|a_{n+1}|<|a_n|\right)$, монотонды кеміп нөлге ұмтылады. Ендеше шартты жинақты.

2) Енді оң жақ ұшында $x=3 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{3^n\cdot\sqrt{n+1}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}}$ – жинақсыз, жоғарыда талданған.

$-3\le x<3$ жинақтылық облысы.

Мысал 3 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2x^n}{7^n\cdot(n+1)}$ жинақтылық облысын табу керек

Мысал 4 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3\cdot(x+4)^{2n+1}}{(n+1)!}$ жинақтылық облысын табу керек

Даламбер белгісі бойынша:

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|\overset{(1)}{=}\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{\frac{(n+1)^3\cdot(x+4)^{2n+3}}{(n+1+1)!}}{\frac{n^3\cdot(x+4)^{2n+1}}{(n+1)!}}\right|\overset{(2)}{=}\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{(n+1)^3\cdot(x+4)^{2n+3}\cdot(n+1)!}{n^3\cdot(x+4)^{2n+1}\cdot(n+2)!}\right|\overset{(3)}{=}$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\left|\left(\frac{n+1}{n}\right)^3\cdot\frac{(x+4)^2(x+4)^{2n+1}\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n(n+1)}{(x+4)^{2n+1}\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n(n+1)(n+2)}\right|\overset{(4)}{=}$$

$$=(x+4)^2\lim_{n\to+\infty}\left(\left(1+\frac{1}{n}^{\to 0}\right)^3\cdot\frac{1}{(n+2)}\right)=(x+4)^2\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n+2}^{\to 0}=(x+4)^2\cdot 0=0$$

Ендеше, $x\in(-\infty;+\infty)$ жинақтылық облысы

Мысал 5 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!(x-2)^{n+1}}{10^n}$ жинақтылық облысын табу керек

Мысал 6 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\cdot(x+2)^n}{(3n-1)\cdot 5^n}$ жинақтылық облысын табу керек

Даламбер белгісі бойынша: $\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|$

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{\frac{(x+2)^{n+1}}{(3(n+1)-1)\cdot 5^{n+1}}}{\frac{(x+2)^n}{(3n-1)\cdot 5^n}}\right|=\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{(x+2)(x+2)^n\cdot 5^n(3n-1)}{(x+2)^n\cdot 5\cdot 5^n(3n+2)}\right|=$$

$$=\frac{|x+2|}{5}\lim_{n\to+\infty}\frac{3n-1}{3n+2}=\frac{\infty}{\infty}=\frac{|x+2|}{5}\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{3n-1}{n}}{\frac{3n+2}{n}}=\frac{|x+2|}{5}\lim_{n\to+\infty}\frac{3-\frac{1}{n}^{\to 0}}{3+\frac{2}{n}^{\to 0}}=\frac{|x+2|}{5}$$

Стандартты теңсіздік аламыз: $\frac{|x+2|}{5}<1$ немесе $|x+2|<5$ немесе $-5<x+2<5$

$-7<x<3$ – жинақтылық интервалы, ұштарын жинақтылыққа зерттейміз:

$x=-7$ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\cdot(x+2)^n}{(3n-1)\cdot 5^n}$:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\cdot(-7+2)^n}{(3n-1)\cdot 5^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\cdot(-5)^n}{(3n-1)\cdot 5^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\cdot(-1)^n\cdot 5^n}{(3n-1)\cdot 5^n}=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1+n}}{(3n-1)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{2n-1}}{(3n-1)}=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n-1)}$$

Жинақсыз қатар. **интегралдық белгіні қолдануға болады:** $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{3x-1}=(*)$

$$(*)=\frac{1}{3}\int_1^{+\infty}\frac{d(3x-1)}{3x-1}=\frac{1}{3}\lim_{b\to+\infty}\left(\ln(3x-1)\right)\Big|_1^b=\frac{1}{3}\lim_{b\to+\infty}\left(\ln(3b-1)^{\to+\infty}-\ln 2\right)=+\infty$$

$$x=3\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\cdot(3+2)^n}{(3n-1)\cdot 5^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{3n-1}$$

Лейбниц белгісі шартты жинақты:

$-7<x\le 3$ – жинақтылық облысы.

Мысал 7 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\cdot(x+3)^n}{\sqrt[3]{2n+1}}$ жинақтылық облысын табу керек